MODELOS DE EXÁMENES

Pruebas de acceso a la universidad

Matemáticas II

Universidad Complutense (Madrid)

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)**

Curso **2006-2007**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro *m*.

2. (2 puntos). Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz *X* tal que $XAX^{-1} = B$.

3. (3 puntos). Dados el punto A(1,–2,–3), la recta $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$

y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) (1,5 puntos). Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

4. (3 puntos). Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) (1,5 puntos). Para cada valor de *m* hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (*a* , *f(a)*) pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos). Hallar el valor de *m* para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de *f*(*x*).

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

2. (2 puntos). Dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

3. (3 puntos). Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ c & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Encontrar las condiciones que deben cumplir *a*, *b*, *c* para que se verifique *AB*=*BA*.

b) (1,5 puntos). Para *a*=*b*=*c*=1, calcular B^{10}.

4. (3 puntos). Sean los puntos $A(\lambda,2,\lambda)$, $B(2,-\lambda,0)$, $C(\lambda,0,\lambda+2)$.

a) (1 punto). ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos *A*, *B* y *C* están alineados?

b) (1 punto). Comprobar que si *A*, *B*, *C* no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto). Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo *ABC* para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)**

Curso **2006-2007**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Hallar los puntos de la recta $r: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

2. (2 puntos). Se consideran las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto *P* (2, –1, 2) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:
a) (2 puntos). Discutirlo según los distintos valores del parámetro *k*.
b) (1 punto). Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

4. (3 puntos). *a*) (1,5 puntos). Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) (1,5 puntos). Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (2 puntos). Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular *a* y *b* de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto). Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

3. (3 puntos). Sean las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s : \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos). Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

4. (3 puntos). Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0,2)$.

ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1,3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$.

iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 punto). Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) (1 punto). Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

c) (1 punto). Si $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2007-2008
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - ay & = & 2 \\ ax - y & = & a+1 \end{array} \right.$$

se pide:
a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.
b) (1 punto). Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array} \right. , \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{array} \right. ,$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.
b) (1,5 puntos). Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r, s.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^2)$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x\big(\ln(x)\big)^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_2.
b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_3.
c) (2 puntos). Calcular el determinante de la matriz A_5.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
a) (1,5 puntos). Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1,$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.
b) (1,5 puntos). Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:
a) (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
c) (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto D al plano π.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados el plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:
a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π y r.
c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Curso **2007-2008**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = e^{-x}(x^2+1)$$

se pide:
a) (2 puntos). Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
b) (1 punto). Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.
b) (1,5 puntos). Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$, se pide:
a) (1 punto). Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.
b) (1 punto). Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\ \text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4},$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
a) (1,5 puntos). Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos). Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dados el plano:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:
a) (1 punto). Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.
b) (2 puntos). Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Curso **2008-2009**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide:
a) (1 punto). Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.
b) (1 punto). Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.
c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 4x & + & 4\lambda y & + & 2z & = & 2\lambda \\ \lambda x & + & y & - & \lambda z & = & \lambda \\ 4\lambda x & + & 4\lambda y & + & \lambda z & = & 9 \end{array} \right. ,$$

se pide:
a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
b) (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\, dt \,.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}\,, \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}\,,$$

se pide:
a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.
b) (1 punto). Determinar la distancia entre las rectas r y s.
c) (1 punto). Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 3 puntos.
Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3\,(x-5)\ ,$$

obtener:
a) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) (1 punto). Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
d) (1 punto). La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & \lambda \\ \lambda x & - & 2y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array}\right.\ ,$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
b) (0,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea posible.

Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\ ,$$

se pide:
a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.
b) (1 punto). Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Curso **2008-2009**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) (1,25 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
b) (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
c) (1,25 puntos). Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \quad \text{y} \quad x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.
b) (1,5 puntos). Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \qquad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
a) (1 punto). Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad ,$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.
b) (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.
c) (1,5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0,2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \lambda x & +2y & +z & = & 0 \\ \lambda x & -y & +2z & = & 0 \\ x & -\lambda y & +2z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

se pide:
a) (1 punto). Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0\,.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$.

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2009/2010** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	MODELO

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\,e^{-x}\,,$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:
a) (1,5 puntos). Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) (1 punto). Estudiar para qué valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
c) (0,5 puntos). Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 3 puntos.
Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.
b) (1,5 puntos). Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2 puntos.
Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2 puntos.
Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = & k+2 \\ kx + y + z = & k \\ x + y + kz = & -2(k+1) \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x\,,$$

se pide:
a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
b) (1 punto). Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.
c) (1 punto). Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado a).

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & & & z & = & 2 \\ x & + & \lambda y & - & z & = & 4 \\ -\lambda x & - & y & - & z & = & -5 \end{array}\right. ,$$

se pide:
a) (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ.
b) (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
c) (1 punto). Resolverlo para $\lambda = -2$.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los puntos $A(2,2,3)$ y $B(0,-2,1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y B.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenadas $0 = (0,0,0)$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOE**)

Curso **2009-2010**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

se pide:

a) (0'75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
b) (0'75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
c) (0'75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
d) (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}\,, \qquad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}\,,$$

se pide:

a) (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.
b) (1 punto) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ky & - & z & = & 0\,, \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0\,, \\ x & - & 4y & + & kz & = & 0\,, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.
b) (1 punto) Resolverlo para el caso $k = 3$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar dos constantes a, b, tales que $A^2 = aA + bI$.
b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\,\ln x}{2^x}\,, & \text{si } x > 0\,, \\ x + k\,, & \text{si } x \leq 0\,, \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay - z = a\,, \\ ax + 2z = -2\,, \\ x + z = -2\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.
b) (1 punto) Resolverlo en el caso $a = 0$.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}\,, \qquad s \equiv \begin{cases} x + z = 3\,, \\ 2x - y = 2\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.
b) (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s.

Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2 puntos.

Sea π el plano que contiene a los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$ y $R = (0, 0, 3)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

b) (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOE**)

Curso **2009-2010**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$,

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$, c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Hallar:

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$.

b) (1 punto) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+4x^3\right)^{2/x^3}$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$, donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2\,, \qquad y = 2x + 1\,,$$

se pide:

a) (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
b) (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.
c) (1 punto) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Ejercicio 2 . **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π.
b) (1 punto) Para el valor $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π.
c) (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π.

Ejercicio 3 . **Calificación máxima:** 2 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcccccl} 2x & + & my & + & 3z & = 3\,, \\ x & + & y & - & 2z & = 0\,, \\ 5x & + & (m+1)y & + & z & = 9\,. \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1'5 puntos) Discutir el sistema según los valores de m.
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso $m = 0$.

Ejercicio 4 . **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para qué valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOE**)

Curso **2009-2010**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m.
b) (1 punto) En el caso $m=0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1\,, \\ z = 3\,, \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0\,, \\ y - z = 0\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
b) (1 punto) Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Calcular los límites:

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}(1+\arctan x)^{a/x}$, b) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Calcular:

a) (1 punto) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$,

b) (1 punto) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dados el plano

$$\pi_1 \equiv \; 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores $v_1 = (0,2,6)$ y $v_2 = (1,0,b)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.
b) (1 punto) Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.
c) (1 punto) Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Los puntos $P(1,2,1)$, $Q(2,1,1)$ y $A(a,0,0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 0\,, \\ 2x & - & y & + & z & = & 3\,, \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la compatibilidad del sistema.
b) (0,5 puntos) Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
c) (0,5 puntos) Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.
b) (1 punto) ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOE**)

Curso **2009-2010**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Se consideran las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda\,, \\ y = 2\,, \\ z = 3 - \lambda\,, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + 2y - z = -1\,, \\ x + y = -2\,. \end{cases}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0, 1, -2)$ y corta a las rectas r y s.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B.

a) (1 punto) Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0'5 puntos) Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1'5 puntos) Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Obtener el valor de a para que: $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4\,.$$

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Hallar:

a) (0'5 puntos) $\displaystyle\int_{14}^{16} (x - 15)^8 dx\,.$ b) (1'5 puntos) $\displaystyle\int_{9}^{11} (x - 10)^{19}(x - 9)\, dx\,.$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & kz & = & k\,, \\ x & + & ky & + & z & = & k^2\,, \\ kx & + & y & + & z & = & 1, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k = 0$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

a) (1'5 puntos) Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0'5 puntos) Representar gráficamente la función.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = -2\,, \\ x - 2y = -1\,, \end{array}\right. \qquad s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{2}\,,$$

se pide:

a) (1 punto) Dados los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(a, 3, -3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B, sea paralela a la recta s.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos

$$\pi_1 \equiv 5x - y - 7z = 1 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 \equiv 2x + 3y + z = 5\,.$$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Modelo - Ejemplo
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \lambda x & & +\lambda z & = & 2 \\ x & +\lambda y & -z & = & 1 \\ x & +3y & +z & = & 2\lambda \end{array}\right. ,$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2} \quad ,$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas de f.
b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \qquad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1},$$

se pide:
a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de las rectas r, s.
b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r, s.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$, $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:
a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β.
b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$.
b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\dfrac{1}{3}(4I - A)$.
c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$, $C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$, $E(1, 0, 2)$, se pide:
a) (1 punto). Demostrar que los puntos A, B, C, D son coplanarios.
b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.
c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A, B, C, D.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x\, e^{1/x}$.

b) (1 punto). $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$.

siendo $\tan x$ la tangente trigonométrica de x.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \operatorname{sen} x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.